TEST DE INDEPENDENCIA BASADO EN SERIES DE TIEMPO SIMBÓLICAS

Wiston Adrián Risso[1]

RESUMEN

En el presente estudio se desarrolla un test de independencia que se basa en el concepto de series de tiempo simbólicas (STS). Se deriva un estadístico bajo el supuesto de que la serie es un proceso independiente. Se obtiene que, considerando *n* frecuencias simbólicas independientes existe un estadístico que se distribuye asintóticamente como una Chi-cuadrado con *n-1* grados de libertad. Se puede testear la hipótesis nula de independencia o no linealidad contrastando el estadístico con un valor crítico de la distribución mencionada. Se estudia el tamaño y el poder del test para muestras pequeñas a través de experimentos con simulaciones de Monte Carlo y en comparación con pruebas de independencia bien conocidas como el BDS y la prueba de rachas. Se realizaron experimentos con 20 procesos generados por distribuciones de probabilidad, modelos caóticos y modelos estocásticos. Se concluye que el test propuesto tiene muchas ventajas sobre otras pruebas, en especial la prueba BDS en cuanto a simplicidad de cálculo y potencia en detección de ciertos procesos como el medias móviles no lineal o el modelo caótico Anosov cuando las muestras son pequeñas. Asimismo se pone a prueba el test con series de tiempo financieras.

Palabras Clave: *Test independencia, no linealidad, econometría*

Introducción

En economía hay presentes una variedad de procesos dinámicos. En el intento de representar una compleja realidad se han aplicado modelos lineales, no lineales, caos determinístico y modelos estocásticos. Para los especialistas en economía aplicada es esencial contar con instrumentos para detectar algún tipo de dependencia en las series de tiempo. En particular, como señala Brooks (1996), testear la dependencia no lineal se ha convertido en un área de investigación importante debido a sus implicaciones en la modelización y la predicción. Aún más, la importancia de testear cierto grado de aleatoriedad de una serie no solo se limita al nivel macroeconómico, también a nivel microeconómico es importante como ya fue señalado por Wald y Wolfowitz (1943). Cuando diseñaron el test de rachas, ellos señalaban que la aleatoriedad era un problema que surgía frecuentemente en el control de calidad de productos manufacturados.

Buscar evidencia de no linealidad en series de tiempo significa que las proyecciones podrían ser mejoradas al pasar de un modelo lineal a uno no lineal. Además se considera que detectar dependencia en los residuos de un modelo lineal es evidencia de una representación no adecuada de los datos. Aunque la economía es rica en procesos dinámicos, las pruebas estadísticas que más comúnmente se aplican son funciones de correlación motivadas por relaciones lineales que involucran variables continuas y procesos Gaussianos como fue

[1] Instituto de Economía (IECON)-Universidad de la República. E-mail: arisso@iecon.ccee.edu.uy.

señalado por Granger et al. (2004). Es así que una cantidad considerable de diagnósticos se usan para examinar si los residuos se apartan de la independencia, la propiedad de independencia e idéntica distribución (i.i.d.), la reversibilidad, la diferencia de martingala y de otras propiedades.

Se puede encontrar una extensa literatura sobre como testear la independencia o la no linealidad. Las pruebas de correlación son ampliamente usadas como se puede apreciar en King (1987) quien realiza una revisión. Sin embargo, como resaltan Mantilla y Ruiz (2008) estas pruebas no son consistentes contra alternativas que presentan autocorrelación igual a cero. El modelo autorregresivo con heterocedasticidad condicional (ARCH), el modelo bilineal, el proceso de media móvil no lineal (NLMA) y el mapa logístico son ejemplos de procesos que no son independientes pero tienen autocorrelación igual a cero. Test de Durbin-Watson (DW) propuesto por Durbin y Watson (1950) (1951) es el test más usado a la hora de testear la autocorrelación de primer orden AR(1) y fue extendido por Wallis (1972) y Vinod (1973). No obstante, DW es un test especializado en dependencia lineal y tiene baja sensibilidad en procesos con dependencia de tipo no lineal, como se puede ver en Azzalini y Bowman (1993).

Dufour et al. (1982) realiza una recopilación bibliográfica de una serie de pruebas no paramétricas basadas en instrumentos tales como rachas (*runs*), signos, rangos, permutaciones, recuento de frecuencias, registros y cuotas. La conocida prueba de rachas propuesta por Wald y Wolfowitz (1943) se basa en la ocurrencia repetida del mismo valor o categoría de una variable, como puede ser el signo. La prueba de rachas sobre aleatoriedad supone que la media y la varianza son constantes y que la probabilidad es independiente.

Barnett et al. (1997) realiza una competición entre las mejores pruebas de nolinealidad y caos que se encuentran disponibles. La prueba de Hinich propuesta por Hinich (1992) tiene cero poder contra algunas formas de no linealidad. La prueba del exponente de Lyapunov sugerida por Nychka et al. (1992) es una prueba de caos y no detecta otro tipo de no linealidad. La prueba de White (1989) es una prueba de no linealidad bajo la hipótesis de linealidad en la media. Por ejemplo, esta prueba correctamente acepta linealidad en la media de un proceso ARCH y GARCH, aunque estos son procesos no lineales. La hipótesis nula de la prueba de Kaplan (1993) es la linealidad del proceso.

Brock et al. (1996) propone la prueba BDS para detectar procesos caóticos. Sin embargo, esta prueba también sirve como un test de independencia o prueba de no linealidad mostrando un alto poder contra una vasta gama de alternativas no lineales.

La Entropía también ha sido aplicada para probar la independencia. Joe (1989a, 1989b) y Robinson (1991) proponen medidas de dependencia serial basadas en la entropía. Granger y Liu (1994) proponen una medida de entropía no paramétrica normalizada y Granger et al. (2004) introducen una entropía métrica transformada de dependencia. Hong y White (2005) sugieren una entropía no paramétrica basada en Kernell para testear la dependencia. Matilla-García (2008) construye un test de independencia usando la dinámica simbólica y la entropía de permutaciones que es comentado y criticado por Elsinger (2013).

En el presente estudio, se propone un test nuevo, simple y poderoso que se basa en el análisis de series de tiempo simbólicas (STSA). El enfoque de STSA considerado en el presente trabajo se explica extensivamente en Daw et al. (2003), Piccardi (2004), Finney et al. (1998), Daw et al. (1998).

El presente trabajo se organiza de la siguiente forma. La sección 2 presenta el enfoque de series de tiempo simbólicas. En la sección 3 se desarrolla el test simbólico de independencia. Las pruebas de tamaño y poder se presentan en la sección 4. En la sección 5 se aplica la prueba de independencia en series de tiempo financiera. Finalmente, en la sección 6 se mencionan algunas conclusiones.

Análisis de Series de Tiempo Simbólicas (STSA)

Como se menciona en Finney et al. (1998) el concepto de simbolización tiene sus raíces en la teoría de los sistemas dinámicos, en especial en el estudio de los sistemas no lineales que pueden exhibir bifurcación y caos. Además de la eficiencia y rapidez a la hora de realizar cálculos, los métodos simbólicos son también robustos cuando en la serie está presente el ruido. Williams (2004) señala que la dinámica simbólica es un método para estudiar sistemas no lineales con tiempo discreto mediante el proceso de tomar una trayectoria previamente codificada usando secuencias de símbolos de un conjunto finito, también llamado alfabeto. Sin embargo, Piccardi (2004) resalta que la dinámica simbólica debería ser diferenciada del análisis simbólico. El primero se relaciona con la investigación teórica de sistemas dinámicos, mientras que el segundo es de aplicación cuando los datos se caracterizan por un bajo grado de precisión. La idea en el análisis simbólico es la de discretizar los datos aplicando la participación correcta y obteniendo como consecuencia una secuencia simbólica. Esta secuencia es capaz de detectar la verdadera dinámica del proceso cuando los datos están altamente afectados por el ruido.

De esta forma, la simbolización de los datos implica la transformación de la serie original, que generalmente toma valores en el conjunto de los reales en una serie de símbolos discretos. La serie simbólica resultante puede ser analizada en busca de patrones temporales no aleatorios. Esto significa que dada una serie de tiempo $\{x_t\}_{t=1,2,\ldots,T^*}$, se estudia la dependencia presente en la serie mediante la transformación del problema en una serie de tiempo simbólica $\{s_t\}_{t=1,2,\ldots,T^*}$.

Considere una serie de tiempo $\{x_t\}_{t=1,2,\ldots,T^*}$ donde T^* es el tamaño de la muestra. El enfoque de análisis de series de tiempo simbólicas sugiere como primer paso tomar una partición tal que la ocurrencia individual de cada símbolo tenga la misma probabilidad respecto a cualquier otro símbolo, siendo el resultado una serie $\{s_t\}_{t=1,2,\ldots,T^*}$. Por ejemplo, imagine que $\{x_t\}_{t=1,2,\ldots,T^*}$ es una serie de tiempo generada por un ruido blanco Gaussiano, se podría definir un discretización en dos regiones estableciendo $s_t=0$ cuando x_t toma un valor por debajo del 50% de la función de distribución y $s_t=1$ en el otro caso. La nueva serie de tiempo $\{s_t\}_{t=1,2,\ldots,T^*}$ sería similar a una serie producida por tirar una moneda T^* veces. Claramente, se podría elegir otra discretización con una mayor cantidad de símbolos, seis por ejemplo traducirían las serie Gaussiana del ejemplo en un proceso similar al generado por tirar un dado repetidas veces.

La teoría frecuentemente llama alfabeto (A) al conjunto que consiste en a símbolos y palabras a la secuencias de tamaño w. Como segunda etapa, se deben definir subsecuencias de diferente tamaño w que generan una nueva serie a ser simbolizada otra vez. La primera simbolización $w=1$ es la trivial, la segunda simbolización es aplicada para $w=2$ y así sucesivamente. Para fijar ideas considere el ejemplo sobre la variable Gaussiana simbolizada usando dos símbolos ($a=2$), la secuencia de dos símbolos consecutivos ($w=2$) produce cuatro eventos posible ($a^w=4$), la secuencia de tres símbolos consecutivos ($w=3$) produce ocho

($a^w=8$) y así sucesivamente. Debido a que se considera una partición que implica regiones con igual probabilidad, las frecuencias relativas de cada posible subsecuencia de datos verdaderamente aleatorios deberían ser iguales entre ellas. Siguiendo el ejemplo, cuando $a=2$ y $w=2$ en teoría cada evento {(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)} tiene probabilidad 1/4 y para $a=2$ y $w=3$ se tiene {(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)} con probabilidad 1/8 para cada evento. En general, para un proceso aleatorio simbolizado la probabilidad de cada secuencia de largo w es a^{-w}, de aquí en adelante se llamará n a este número que representa el total de posibles eventos.

Una vez obtenida la serie de tiempo simbólica el tercer paso implica calcular todas las frecuencias relativas para todas las subsecuencias simbólicas en los datos. Se debe señalar que en el presente caso, dado que la partición se define mediante la división de la frecuencia en regiones igualmente probables analizar la frecuencia relativa cuando $w=1$ es trivial. El interés en el presente trabajo estará centrado cuando w>1, esto significa para series que involucren subsecuencias de dos o más símbolos.

Como en la práctica no se cuenta con series de tiempo infinitas, se tiene que trabajar con muestras finitas por lo cual se debe obtener un estadístico a los efectos de testear la hipótesis de independencia y estudiar el efecto cuando las muestras son finitas.

Test simbólico de independencia

El propósito de la presente sección es derivar un estadístico simple y su distribución asintótica cuando el proceso a ser estudiado es aleatorio y la muestra es finita.

Considere una serie de tiempos finita $\{x_t\}_{t=1,2,\dots,T^*}$ de tamaño T^*, generada por un proceso independiente o aleatorio. Defina una partición en la serie en a regiones de igual probabilidad obteniendo una serie de tiempo simbolizada $\{s_t\}_{t=1,2,\dots,T^*}$ donde cada símbolo s_t toma un valor del alfabeto $A=\{A_1, A_2,\dots, A_a\}$.

Como se quiere derivar un estadístico general para diferentes tamaños de alfabeto a y diferentes subsecuencias de largo w, se deben hacer dos consideraciones: 1) desde ahora se llamará n a la cantidad de eventos posibles. Esto es $n=a^w$, donde el caso más simple ($w=1$) $n=a$ entonces la cantidad de eventos es igual al tamaño de conjunto de símbolos; 2) En la práctica se cuenta con una muestra o serie de tiempo de tamaños T^*, no presenta problemas cuando $w=1$, pero cuando se calculan las subsecuencias de símbolos consecutivos se pierden observaciones en las subsiguientes simbolizaciones. Por ejemplo, cuando se calcula la frecuencia para 2 símbolos consecutivos se cuenta con una muestra total de tamaño T^*-1 ya que se pierde una observación. En general, se puede definir el tamaño de la muestra de todas las series que consideran los diferentes w como $T=T^*+w-1$, de nuevo aquí resaltar que en el caso trivial cuando $w=1$, $T^*=T$.

Definiendo S_i para $i=1,2,\dots,n$ como la suma total de los i eventos en la serie de tiempo simbolizada de tamaño T, se puede definir la variable multidimensional $S=\{S_i\}$ que se distribuye como una multinomial con $E(S_i)=(1/nT)$, $Var(S_i)=(1/n)(n-1)/nT$ and $Cov(S_i,S_j)=-(1/n)(1/nT)$ $\forall i\neq j$. En el ejemplo de lanzar una moneda se tienen dos símbolos correspondientes a dos eventos S_1 y S_2 ($n=2$) y S se distribuye binomial con media $1/2$ y varianza ($1/4T$). Sin embargo, para dos símbolos con eventos consecutivos de largo $w=2$ se tiene una variable $S=(S_1, S_2, S_3, S_4)$ que se distribuye multinomial con media *1/4* y varianza (*3/16T*).

Como se verá la frecuencia de los eventos es importante en el estadístico y como cada S_i/T tiene media (*1/n*), varianza *(1/n)(n-1)/(nT)* y covarianza *–(1/n)(1/nT)*, el vector de las *n* frecuencias puede ser aproximado por una distribución normal multivariada $N(1/n, \sigma^2\Sigma)$ en donde σ^2 es (*1/nT*) y Σ es una matriz idempotente como en la expresión (1).

$$\Sigma_{nxn} \equiv \begin{bmatrix} (n-1)/n & -1/n & \ldots & -1/n \\ -1/n & (n-1)/n & \ldots & -1/n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1/n & -1/n & \ldots & (n-1)/n \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Convenientemente se puede definer el vector variable $\{\varepsilon_i\}=\{(S_i/T)-(1/n)\}_{i=1,2,\ldots,n}$ que tiene una distribución normal multivariada $N(\varnothing,\sigma^2\Sigma)$, en donde ø es el vector nulo. De esta manera se puede definir el estadístico que aparece en la expresión (2)

$$\left\{ \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i^2}{\sigma^2} \right\} \qquad (2)$$

El término entre paréntesis en la expresión (2) es una forma cuadrática de variables normales aleatorias. Como Mathai y Provost (1992) señalan, la distribución de formas cuadráticas en variables normales ha sido ampliamente estudiada por muchos autores. Se han derivado varias representaciones de la función de distribución y se han dado diferentes procedimientos para calcular la distribución y preparar las tablas apropiadas. Patnaik (1949), Pearson (1959), Siddiqui (1965), Solomon and Stephens (1978) and Oman and Zacks (1981) han propuesto distribuciones aproximadas. En el presente studio se aplica el siguiente teorema que aparece en Mathai y Provost (1992) p. 197:

La condición necesaria y suficiente para que la forma cuadrática $X'AX$ se distribuya como una Chi-cuadrado con *r* grados de libertad cuando *X* tiene una distribución normal multivariada con media vector ø y una matriz singular de covarianzas Σ, son:

(i) $(A\Sigma)^2=(A\Sigma)^3$ and $tr(A\Sigma)=r$

(ii) $tr(A\Sigma)^2=tr(A\Sigma)=r$ and $\rho(\Sigma A\Sigma)=r$

Note que el teorema puede ser aplicado en el presente caso en donde el vector $X=(\varepsilon_1/\sigma,\varepsilon_2/\sigma, \ldots,\varepsilon_n/\sigma)$ se distribuye como una normal multivariada $N(\emptyset,\Sigma)$. En este caso A es la matriz identidad I y Σ es una matriz simétrica, singular e idempotente. Como $tr(A\Sigma)=n-1$, entonces $X'AX$ se distribuye Chi-cuadrado con $(n-1)$ grados de libertad.

Hay que recordar que como $\sigma^2=(1/nT)$ entonces podemos obtener la distribución asintótica del Estadístico de Aleatoriedad Simbólica (EAS) como se presenta en la expresión (3).

$$EAS \equiv Tn\left\{\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{S_i}{T}-\frac{1}{n}\right)^2\right\} \quad se\ distribuye\ asintoticamente\ como\ \chi^2_{n-1} \tag{3}$$

Es de destacar que en práctica calcular el estadístico es muy simple. Solamente se tienen que considerar los símbolos (a), las subsecuencias (w) y calcular las frecuencias de cada evento en las series de tiempo.

En resumen, el test trabaja de la siguiente manera:

Paso 1: Considere la serie de tiempo $\{x_t\}_{t=1,2,\ldots,T^*}$ y calcule la distribución empírica para definir regiones de igual probabilidad de acuerdo a la cantidad de símbolos o el tamaño del alfabeto previamente seleccionado.

Paso 2: De acuerdo a la partición definida, traduzca $\{x_t\}_{t=1,2,\ldots,T^*}$ en $\{s_t\}_{t=1,2,\ldots,T^*}$ que es la serie de tiempos simbólica con $w=1$.

Paso 3: Calcule diferentes series de tiempo simbólicas para las diferentes subsecuencias w.

Paso 4: Para cada series simbólica correspondiente a cada w calcule la frecuencia de los diferentes eventos n, de la siguiente manera S_i/T para cada $i=1,2,\ldots,n$.

Paso 5: Para cada w calcule el $EAS(a,w)= Tn\{\Sigma(S_i/T - 1/n)^2\}$ como se presentó en la expresión (3).

Paso 6: Compare el $EAS(a,w)$ con una Chi-2 de $n-1$ grados de libertad al 0.05 de significación bajo la hipótesis nula de independencia. Cuando $EAS(a,w)$ es más grande que el valor critico que surge de la Chi-2 se rechaza la hipótesis nula.

Como ejemplo considere al serie de tiempo de tamaño $T=50$ que surge de lanzar una moneda ($n=2$ eventos) el EAS se calcula como $50.2.\{[(S_1/50)-(1/2)]^2+[(S_2/50)- (1/2)]^2\}$ donde S_1 y S_2 son las veces que el evento 1 (cara) y el evento 2 (cruz) respectivamente aparecen en la serie. En este caso, EAS debería ser comparado con el valor critico $3{,}84$ de una Chi-cuadrado con 1 grado de libertad (alfa=0,05). Visto que el proceso es aleatorio EAS debería ser menor que el valor crítico. Para subsecuencias de símbolos de largo $w=2$ se tiene $(50-1).4.\{[(S_1/50)-(1/4)]^2+[(S_2/50)-(1/4)]^2+[(S_3/50)-(1/4)]^2+[(S_4/50)-(1/4)]^2\}$ comparado con un valor critico 7,81 de una Chi-2 con 3 grados de libertad (alfa= 0,05).

Se puede señalar que el EAS coincide con el estadístico de independencia de Pearson pero aplicado a series de tiempo simbólicas.

Lo que es más, este estadístico está relacionado con la entropía de Shannon. Si se considera que H es la Entropía de Shannon Normalizada en donde $H=0$ para procesos que son ciertos y $H=1$ para procesos completamente aleatorios.

Si en la tradicional formula de H se sustituyen las probabilidades por las frecuencias definidas por las series simbólicas (S_i/T) se obtiene la ecuación (4).

$$H \equiv \frac{-1}{\log_2(n)} \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{S_i}{T} \right) \log_2 \left(\frac{S_i}{T} \right) \tag{4}$$

Como se conoce la distribución de (S_i/T) pero el logaritmos introduce alguna dificultad en H, se puede obtener una aproximación lineal cuando la variable es menor que 1 en valor absoluto. En el presente caso se sustituye (S_i/T) por $\varepsilon_i+(1/n)$ $\forall i=1,2,\dots,n$ en H como muestra la expresión (5).

$$H \equiv \frac{-1}{\log_2(n)} \sum_{i=1}^{i=n} \left(\varepsilon_i + \frac{1}{n} \right) \log_2 \left(\varepsilon_i + \frac{1}{n} \right) \tag{5}$$

Como $|\varepsilon_i| \leq 1$, su media es 0 y la varianza es $(n-1)/Tn^2$ la cual decrece con el tama;o de la muestra y el número de eventos. Dado que $log_2(\varepsilon_i+1/n)=log_2(1+n\varepsilon_i)-log_2(n)$ es una aproximación lineal cuando $\varepsilon_i=0$ del $log_2(1+n\varepsilon_i)\approx nc\varepsilon_i$ y por tanto $log_2(\varepsilon_i+1/n)=nc\varepsilon_i - log_2(n)$ en donde $c=1/ln(2)$. Las expresiones (6) y (7) desarrollan H cuando se introducen los anteriores resultados.

$$H \approx \frac{-1}{\log_2(n)} \left\{ \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{n\varepsilon_i + 1}{n} \right) \left(nc\varepsilon_i - \log_2(n) \right) \right\} \tag{6}$$

$$H \approx \frac{-1}{n.\log_2(n)} \left\{ n^2 c \sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i^2 - n.\log_2(n) \sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i + nc \sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i - n.\log_2(n) \right\} \tag{7}$$

Se puede notar que $\Sigma\varepsilon_i=0$ ya que $\Sigma\varepsilon_i=\Sigma\{\Sigma(S_i/T)-\Sigma(1/n)\}=\Sigma\{(T/T)-(n/n)\}=0$ y multiplicando y dividiendo por σ^2, H se puede representar como en la expresión (8) en donde el término entre paréntesis es el estadístico presentado en la ecuación (2).

$$H \approx 1 - \frac{nc}{\log_2(n)} \sigma^2 \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i^2}{\sigma^2} \right\} \qquad (8)$$

Experimentos de tamaño y poder del test simbólico de independencia.

Una vez que se obtuvieron el estadístico y su distribución asintótica se puede proceder al estudio del comportamiento del mismo en muestras finitas y el poder de detectar diferentes tipos de dependencia (estocástica y determinística).

Como se demostró *EAS(a,w)* se distribuye asintóticamente como una *Chi2* con $n\text{-}1=a^w\text{-}1$ grados de libertad. En donde *a* es el número de símbolos y *w* representa el largo de las subsecuencias de símbolos consecutivos en una serie de tiempos.

En la práctica, el *EAS* puede ser aplicado a la serie de residuos de un modelo si se desea detectar independencia. Para detectar no linealidad de tipo estocástico o determinístico el test puede ser aplicado a los residuos de un modelo lineal como puede ser el *ARMA(p,q)*.

Se realizaron experimentos para mostrar el tamaño y poder del test simbólico de independencia. A los efectos comparativos se aplicó también la prueba BDS que depende de dos parámetros: la dimensión de encaje (*m*) y épsilon (ε). Aquí se aplican las combinaciones de *m* y ε sugeridas por Kanzler (1999) quien después de llevar a cabo una series de experimentos obtiene que $m=2$ y $\varepsilon=1,5$ aparecen como las mejores aproximaciones. Por su parte Liu et al. (1992) realizan experimentos de tamaño y poder obteniendo una combinación de $m=3$ y ε en el entorno de *0,26* como el mejor tamaño. Además, Kanzler (1999) realiza simulaciones de Monte Carlo para obtener los valore críticos del test BDS en pequeñas muestras.

Para estudiar el tamaño del *EAS* se realizó el siguiente experimento. Se generaron 10.000 simulaciones de Monte Carlo para series de tiempo de procesos Gaussianos pseudo-aleatorios que se distribuyen *i.i.d.(0,1)* para diferentes tamaños muestrales (*T=50*, *T=200*, *T=500*, *T=2.000*). Se aplicaron el test de rachas, el BDS y el presente test EAS considerando valores críticos con niveles de significación $\alpha=0,01$, $\alpha=0,05$ y $\alpha=0,10$. De esta forma se calcula el porcentaje de rechazos de la hipótesis nula de independencia sobre las 10.000 simulaciones de Monte Carlo para cada test, tamaño de muestra y niveles de significación. Cuando el estadístico es insesgado, el porcentaje de rechazo de la hipótesis nula de independencia cuando el proceso es realmente independiente debería acercarse al nivel de significación. Es decir que con un $\alpha=0,05$, el porcentaje de rechazo debería ser 5%.

La Tabla 1 muestra los resultados del experimento de tamaño para el test EAS. Se pueden hacer dos comentarios generales: 1) Como se puede apreciar para una serie de tiempos menor a los 2.000 datos pareciera no ser aconsejable el uso de más de 4 símbolos; 2) Relacionado con lo anterior cuanto más chico el tamaño de la muestra menor debería ser el número de símbolos a considerar y el largo de las subsecuencias.

En general los resultados muestran que el test es conservador ya que rechaza la hipótesis nula menos veces de lo que se esperaría. Como es un test conservador se deberían contrastar los resultados con el poder que tiene detectando procesos que no sean aleatorios, como se mostrará posteriormente.

Tabla 1. Tamaño del test simbólico de independencia. Porcentaje de rechazo de la hipótesis nula.

Largo (w)	2 símbolos			3 símbolos			4 símbolos			5 símbolos		
	α=1%	α=5%	α=10%	α=1%	α=5%	α=10%	α=1%	α=5%	α=10%	α=1%	α=5%	α=10%
	T=50			T=50			T=50			T=50		
2	0,01	0,41	1,03	0,28	0,47	0,97	24,68	24,68	24,75	24,68	24,68	24,68
3	0,89	1,95	3,27	98,00	98,00	98,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
4	40,10	40,39	40,68	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
5	99,80	99,80	99,80	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
	T=200			T=200			T=200			T=200		
2	0,05	0,59	1,14	0,06	0,42	1,06	0,05	0,32	0,82	0,00	0,00	0,00
3	0,54	1,97	3,64	1,18	2,44	3,76	89,67	89,67	89,69	89,67	89,67	89,67
4	1,31	3,74	6,17	99,84	99,84	99,84	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
5	7,84	10,57	13,06	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
	T=500			T=500			T=500			T=500		
2	0,06	0,54	1,27	0,09	0,47	1,03	0,05	0,31	0,80	0,01	0,01	0,03
3	0,52	1,91	3,49	0,52	1,86	3,69	1,89	3,27	4,73	1,52	1,52	1,52
4	1,28	3,55	6,16	12,23	14,02	16,02	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
5	2,15	5,65	8,93	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
	T=2000			T=2000			T=2000			T=2000		
2	0,08	0,44	1,25	0,06	0,33	0,90	0,02	0,42	1,05	0,00	0,00	0,00
3	0,50	2,03	3,45	0,44	1,88	3,79	0,34	1,72	3,51	0,00	0,00	0,00
4	1,32	3,77	6,32	1,14	4,19	6,94	8,78	11,22	13,88	8,01	8,01	8,01
5	2,41	5,79	8,64	8,13	11,63	14,97	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00

Nota: Se llevaron a cabo 10.000 simulaciones de Monte Carlo basándose en números pseudo-aleatorios generados por la distribución normal en el programa MatLab R2010a.

Cuando se consideran los cuatro tamaños muestrales, se observa que seleccionar 2 símbolos y un largo de 4 genera unos resultados decentes en la mayoría de los casos.

3 símbolos parecen una buena opción para muestra de tamaño 200 o mayores y 4 símbolos para un tamaño muestral de 500 o más grande.

Los mejores resultados se obtienen para una muestra de tamaño 2.000 aplicando 3 símbolos y largo $w=4$. En este caso para α=1%, 5% y 10% el porcentaje de rechazo es 1,14%, 4,19% y 6,94%, respectivamente.

A los efectos de comparar, las mismas simulaciones de Monte Carlo se consideraron a la hora de calcular el test BDS y el test de rachas. La Tabla 2 muestra por un lado, que el test de rachas también es un test conservador. Por otro lado, el test BDS debe ser analizado en sus tres versiones pero también parece ser conservativo.

Como se mencionó anteriormente, en el caso del test BDS se aplicaron tres combinaciones de m y ε. Se puede apreciar que, para una muestra de tamaño 50, solo el caso de valores críticos simulados por Kanzler (1999) presenta resultados valederos. Incluso en el caso de una muestra de 200 los resultados de los valores simulados por Kanzler (1999) siguen siendo los mejores aunque Liu et al. (1992) también presenta buenos resultados. Para un tamaño muestral de 500 y 2000 tanto los parámetros sugeridos por Kanzler (1999) como los valores críticos simulados presentan resultados cercanos a los niveles de significación.

Tabla 2. Tamaño del test BDS y el test de rachas

	Test BDS											
	α=1%	α=5%	α=10%	α=1%	α=5%	α=10%	α=1%	α=5%	α=10%	α=1%	α=5%	α=10%
	T=50			T=200			T=500			T=2000		
Kanzler (1999)	9,30	19,83	27,83	2,57	8,82	15,55	1,27	6,16	12,07	1,22	5,56	10,55
Liu et al. (1992)	4,07	10,80	16,79	1,12	4,86	8,95	0,58	3,53	7,36	0,61	3,05	6,30
Small (Kanzler, 1999)	0,76	4,69	9,45	1,03	4,74	9,99	0,83	4,82	10,37	1,25	5,33	10,48
	Test de Rachas											
	T=50			T=200			T=500			T=2000		
	0,59	3,25	6,65	0,93	4,23	8,99	0,95	4,41	9,31	0,88	4,50	9,38

Nota: Se realizaron 10.000 simulaciones de Monte Carlo con un generador de números pseudo-aleatorios provenientes de un distribución normal en el programa MatLab R2010a.

El test de rachas también es conservador y sus resultados están cerca a los esperados por debajo de los niveles de significación. Es de destacar que estos porcentajes mejoran a mayor tamaño muestral.

El siguiente es un experimento de poder que intenta estudiar cuan poderoso son estas pruebas a la hora de detectar diferentes procesos determinísticos, no lineales y estocásticos.

En este punto se consideran algunos de los procesos generadores sugeridos en la literatura a la hora de hacer experimentos de poder. En el presente estudio se aplicaron los siguientes 20 procesos:

1. *Normal*: proceso aleatorio generado por una *Normal (0,1)*
2. *Chi-2(4)*: proceso aleatorio generado por una *Chi2* con 4 grados de libertad.
3. *t-student(4)*: proceso aleatorio generado por una *t-student(4)*

4. *Normal Truncada*: proceso aleatorio generado por una distribución normal *N(0,1)* truncada en el rango [-1,75; +1,75]

5. *Beta(1/2,1/2)*: proceso aleatorio generado por una distribución *Beta (1/2, 1/2)*

6. *Uniforme(0,1)*: proceso aleatorio generado por una distribución *Uniforme (0,1)*

7. *AR(1)*: $X_t=0,45X_{t-1}+\varepsilon_t$

8. *MA(2)*: $X_t=\varepsilon_t-0,1\varepsilon_{t-1}+0,2\varepsilon_{t-2}$

9. *Logística*: $X_t=4X_{t-1}(1-X_{t-1})$

10. *Henon*: $X_t=1+Y_{t-1}-1,4X^2_{t-1}$ y $Y_t=0,3X_{t-1}$; con la semilla Y_1 generada aleatoriamente por una $|N(0;0,01)|$ y X_1=1. Se considera la serie de tiempos X_t en el estudio.

11. *Anosov*: $X_t=mod(X_{t-1}+Y_{t-1})_1$; $Y_t=mod(X_{t-1}+2Y_{t-1})_1$; Donde las condiciones iniciales X_1, Y_1 son generadas aleatoriamente. Se considera la serie de tiempo X_t en el estudio.

12. *Lorenz*: $X_t=(1+(0,96))X_{t-1}-0,8X_{t-1}Y_{t-1}$; $Y_t=(1-0,8)Y_{t-1}+0,8X^2_{t-1}$;Con condiciones iniciales X_1, Y_1 generadas aleatoriamente. Esta es una versión en tiempo discreto del proceso de Lorenz y en el test se considera la serie de tiempo X_t.

13. *TAR (umbral autorregresivo)*: $X_t=0,9X_{t-1}+\varepsilon_t$ for $|X_{t-1}|\leq 1$ and $X_t=-0,3X_{t-1}+\varepsilon_t$ para $|X_{t-1}|>1$;

14. *NLSIGN (no lineal en signo)*: $X_t=0,45signo(X_{t-1})+\varepsilon_t$

15. *Bilineal*: $X_t=0,7X_{t-1}\varepsilon_{t-2}+\varepsilon_t$;

16. *NLAR (autorregresivo no lineal)*: $X_t=(0,7|X_{t-1}|)/(2+|X_{t-1}|)+\varepsilon_t$;

17. *NLMA (medias móviles no lineal)*: $X_t=\varepsilon_t-0,4\varepsilon_{t-1}+0,3\varepsilon_{t-2}+0,5\varepsilon_t\varepsilon_{t-2}$

18. *BLMA (bilineal medias móviles)*: $X_t=0.4X_{t-1}-0.3X_{t-2}+0.5X_{t-1}\varepsilon_{t-1}+0.8\varepsilon_{t-1}+\varepsilon_t$;

19. *Modular*: $X_t=|(mod(t)_3-1)\ (-1)^t|\ (-1)^t+1+\varepsilon_t$

20. *EGARCH (modelo generalizado autorregresivo de heteroscedasticidad condicionada exponencial)*: $h_t=0,25+0,5X^2_{t-1}+0,6h_{t-1}$ cuando $\varepsilon_t<0$ o $h_t=0,25+0,5X^2_{t-1}+0,6h_{t-1}$ para $\varepsilon_t>0$; y $X_t=\varepsilon_t\sqrt{h_t}$.

Los procesos 1-6 indican diferentes funciones de distribución; 7-8 son dos procesos lineales estacionarios; 9-12 son procesos caóticos determinísticos; 13-20 son procesos estocásticos no lineales. Como se sugiere generalmente, las pruebas fueron aplicadas a los datos en bruto en el caso de los procesos 1-6 y a los procesos caóticos 9-12. Sin embargo, para el caso de los procesos 7-8 y 13-20 las pruebas se aplicaron a los residuos luego de eliminar la dependencia lineal a través de un proceso autorregresivo.

La Tabla 3 muestra los resultados del experimento de poder con 5.000 simulaciones de Monte Carlo cuando se utiliza una muestra muy pequeña de *T=50*. El test *EAS* propuesto en este estudio presenta los mejores resultados considerando 3 símbolos y un largo *w=2*, *EAS(3,2)*. Los cinco procesos generados aleatoriamente por funciones de distribución muestran un porcentaje de rechazo menor al 5% para un $\alpha=0,05$ mostrando el carácter conservado del test. Sin embargo, aunque es conservador es capaz de detectar tres de los cuatro procesos caóticos con un porcentaje de rechazo mayor al 95% para los procesos de Lorenz, Logístico y Henon. El test BDS por su parte muestra peores resultados que el EAS. Los valores críticos simulados por Kanzler (1999) muestran los mejores resultados pero solo son capaces de detectar tres de los cinco procesos aleatorios. El test BDS no muestra buenos resultados para series de tiempo aleatorias generadas por una Normal Truncada, una distribución Uniforme, ni una distribución Beta(1/2,1/2). Asimismo el BDS detecta dos de los procesos caóticos, no detecta el modelo Logístico que es fácilmente detectado por el EAS propuesto. Por otro lado, el test de rachas detecta los cinco procesos aleatorios pero es capaz de detectar solamente un proceso caótico, con lo cual los resultados mostrarían que para una muestra de T=50 solamente el EAS es capaz de detectar el modelo logístico. Ninguna de las pruebas para este tamaño muestral es capaz de detectar los procesos estocásticos no lineales.

En resumen, para T=50, EAS(3,2) detecta 11/20 de los procesos, BDS 7/20 y el test de rachas 8/20.

Tabla 3. Poder de las pruebas para un tamaño muestral T=50

Proceso generador	EAS(2,2)	EAS(2,3)	EAS(3,2)	EAS(4,2)	EAS(5,2)	BDS(a)	BDS (b)	BDS (s)	Test de rachas
Normal	0,32	1,66	0,46	24,72	91,02	20,48	11,14	5,28	3,40
CHI-2(4)	0,46	2,14	0,44	25,36	91,36	15,26	7,56	3,04	4,12
t-student(4)	0,48	1,86	0,42	24,58	91,44	14,72	7,80	3,32	3,72
Normal truncada	0,28	1,62	0,50	24,92	91,62	32,94	18,30	13,30	3,06
Beta(1/2,1/2)	0,30	1,80	0,46	24,12	91,06	35,12	18,16	14,38	3,40
Uniforme(0,1)	0,34	1,68	0,52	24,42	91,26	32,70	18,10	12,88	3,26
AR(1)	0,10	0,60	0,26	22,34	90,90	21,22	11,16	5,16	0,90
MA(2)	0,02	0,44	0,32	20,54	90,18	12,40	7,30	2,40	0,86
Logística	10,54	40,20	100,00	100,00	100,00	59,36	68,42	37,94	22,88
Henon	53,94	77,84	100,00	100,00	100,00	99,18	82,34	96,44	22,38
Anosov	0,98	2,14	0,96	24,50	89,82	31,12	17,78	12,60	4,80
Lorenz	90,72	96,84	95,84	99,78	100,00	96,82	95,82	88,08	98,94
TAR	0,24	1,44	0,50	33,80	95,42	24,32	14,28	6,76	5,04
NLSIGN	0,06	0,94	0,40	23,10	90,28	21,50	12,44	5,32	2,40
Bilineal	0,16	5,38	0,48	28,50	93,30	63,08	60,18	44,64	1,54
NLAR	0,02	0,28	0,40	21,28	90,30	21,50	11,44	5,32	0,58
NLMA	0,14	1,18	0,26	20,80	89,56	15,88	7,56	2,82	1,58
BLMA	0,76	2,34	1,44	39,74	96,46	57,24	51,62	35,58	10,56
Modular	0,00	20,18	0,06	55,68	96,02	70,28	66,10	47,84	19,60
EGARCH	0,10	0,88	3,12	37,40	93,52	59,14	58,42	38,22	3,24

Nota: Se realizaron 5.000 simulaciones de Monte Carlo aplicando el generador de números pseudo-aleatorios del programa MatLab R2010a. *EAS(a,w)* indica el test EAS para una simbolización de *a* símbolos y un largo *w*. BDS (a), (b) y (s) aplican los parámetros óptimos rencontrado por Kanzler (1999), los mejores parámetros para Liu et al. (1992) y los valores críticos simulados por Kanzler (1999) para muestras pequeñas.

La Tabla 4 muestra los resultados del experimento de poder para un tamaño muestral *T=200*. Como era de esperar con una muestra más grande los resultados mejoran. Para el test EAS los mejores resultados se obtienen con 3 símbolos y un largo *w=3*. Los seis procesos aleatorios son reconocidos por el test EAS además de los residuos del AR(1) y MA(2), cuatro de los cinco procesos aleatorios son detectados al 100% y cuatro de los ocho procesos estocásticos son detectados, el modelo Bilineal, el BLMA, el Modular y el EGARCH son detectados con un porcentaje superior al 60%. El test BDS todavía tiene problemas para detectar alguno de los procesos aleatorios, la normal truncada, la distribución uniforme y el beta(1/2,1/2) son rechazados con un porcentaje mayor al 7%. Al igual que el EAS el BDS detecta tres procesos caóticos pero se le dificulta detectar el proceso de Anosov. El proceso logístico es detectado con un porcentaje cercano al 64% cuando el EAS lo detecta al 100%. Por otra parte, el BDS detecta los mismo procesos estocásticos no lineales detectados por el EAS a una tasa por encima del 80%. El test de rachas presenta el peor desempeño, si bien es capaz de detectar los seis procesos aleatorios no es capaz de detectar procesos caóticos como el logístico y el Anosov. Además, el test de rachas solo es capaz de detectar uno de los procesos estocásticos no lineales. En resumen, para T=200 EAS detecta 15/20 de los procesos, BDS 12/20 y el test de rachas 11/20.

Tabla 4. Poder de las pruebas para un tamaño muestral T=200

Proceso Generador	EAS(2,3)	EAS(2,4)	EAS(3,3)	EAS(4,2)	EAS(5,2)	BDS (a)	BDS (b)	BDS (s)	Test de rachas
Normal	1,92	3,70	2,40	0,28	0,32	8,42	4,92	4,60	3,72
CHI-2(4)	1,62	3,34	2,22	0,20	0,32	7,26	3,54	3,56	3,74
t-student(4)	1,72	3,50	2,18	0,18	0,30	6,56	3,16	3,30	4,04
Normal truncada	2,02	3,66	2,42	0,26	0,30	12,86	7,48	7,96	3,96
Beta(1/2,1/2)	1,96	3,26	2,36	0,24	0,28	13,52	6,66	7,92	4,02
Uniforme(0,1)	1,88	3,64	2,74	0,38	0,30	12,22	6,64	7,56	4,20
AR(1)	0,76	2,00	1,74	0,14	0,26	8,88	4,62	4,72	1,36
MA(2)	0,36	1,28	1,30	0,14	0,14	6,54	3,72	3,22	0,76
Logística	20,62	33,74	100,00	100,00	100,00	69,00	62,80	64,26	15,22
Henon	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	83,36
Anosov	2,66	5,32	7,32	1,10	1,02	14,36	7,92	9,20	5,38
Lorenz	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
TAR	17,16	21,50	6,26	15,04	40,02	17,42	10,16	11,46	38,44
NLSIGN	2,74	4,98	4,12	0,82	1,28	9,70	5,24	5,26	8,78
Bilineal	67,50	84,08	81,76	11,52	15,66	99,02	99,02	98,50	7,20

NLAR	0,36	1,42	3,40	0,50	0,20	9,14	4,96	5,30	1,08
NLMA	4,68	12,94	32,72	0,58	0,70	7,94	5,46	4,38	5,60
BLMA	17,38	30,90	60,06	39,26	42,48	98,74	98,68	97,78	39,66
Modular	84,48	100,00	96,64	79,66	61,44	77,48	80,82	71,18	91,84
EGARCH	5,04	7,60	64,18	59,30	63,22	99,54	99,62	99,18	15,30

Nota: Se realizaron 5.000 simulaciones de Monte Carlo aplicando el generador de números pseudo-aleatorios del programa MatLab R2010a. *EAS(a,w)* indica el test EAS para una simbolización de *a* símbolos y un largo *w*. BDS (a), (b) y (s) aplican los parámetros óptimos rencontrado por Kanzler (1999), los mejores parámetros para Liu et al. (1992) y los valores críticos simulados por Kanzler (1999) para muestras pequeñas.

En la Tabla 5 se muestran los resultados del experimento de poder para un tamaño muestral *T=500*. En este caso aunque el EAS con 3 símbolos y un largo *w=3* presenta buenos resultados, la aplicación de 4 símbolos y un largo *w=3* mejora los resultados. En este caso, más procesos son detectados como es de esperar cuando la muestra aumenta de tamaño. En especial se destaca que el test EAS rechaza el proceso caótico Anosov como aleatorio al 93,46% y seis de los ocho procesos estocásticos no lineales son detectados. El test BDS cuando se aplican los parámetros de Liu et al. (1992) es finalmente capaz de detectar todos los procesos aleatorios pero todavía tiene problemas para detectar el proceso caótico de Anosov el cual apenas supera el 6% de rechazo. Además es capaz de detectar cuatro de los ocho procesos estocásticos no lineales. Por su parte el test de rachas todavía tiene problemas detectando el proceso logístico y detecta apenas tres de los ocho procesos estocásticos no lineales. Los procesos NLSIGN y NLAR son los más difíciles de detectar por cualquiera de las tres pruebas con un tamaño muestral de 500, el modelo Anosov es detectado solamente por el EAS cuando se consideran 4 símbolos. En resumen, para un tamaño muestral T=500, EAS es capaz de detectar 18/20 procesos, el BDS detecta 15/20 y el test de rachas 13/20.

Tabla 5. Poder de las pruebas para un tamaño muestral T=500

Proceso generador	EAS(2,3)	EAS(2,4)	EAS(2,5)	EAS(3,3)	EAS(4,3)	BDS(a)	BDS(b)	BDS(s)	Test de rachas
Normal	2,32	3,94	5,88	1,98	3,22	6,32	3,30	5,12	4,72
CHI-2(4)	2,18	4,28	6,24	2,06	3,00	5,72	3,24	4,70	4,90
t-student(4)	1,90	3,62	5,46	1,84	2,78	5,84	3,26	4,78	4,12
Normal Truncada	1,64	3,44	5,44	1,32	2,84	8,28	4,46	6,84	4,50
Beta(1/2,1/2)	1,82	3,64	5,80	1,94	3,38	8,16	4,02	6,84	4,18
Uniforme(0,1)	1,42	3,30	4,66	1,64	2,94	7,58	4,08	6,50	3,80
AR(1)	0,56	1,78	3,82	1,48	2,30	6,02	3,14	4,88	1,44
MA(2)	0,34	1,46	3,46	0,92	2,38	5,84	3,50	4,60	1,08
Logística	17,84	31,28	43,84	100,00	100,00	84,90	65,48	84,02	13,84
Henon	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	99,92
Anosov	3,18	6,22	10,92	6,30	93,46	11,04	6,02	9,16	6,04
Lorenz	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00

TAR	70,60	72,10	70,56	20,32	86,56	23,08	13,94	21,54	88,74
NLSIGN	11,04	14,56	16,62	8,38	17,48	7,18	4,00	6,18	25,24
Bilineal	99,72	99,94	99,96	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	13,22
NLAR	0,46	1,82	3,74	6,24	6,30	7,16	4,34	5,86	1,34
NLMA	13,68	42,06	54,30	95,60	97,22	8,32	7,56	7,02	14,90
BLMA	61,44	85,64	93,40	99,40	99,90	100,00	100,00	100,00	77,34
Modular	99,98	100,00	100,00	100,00	100,00	94,42	96,52	93,88	100,00
EGARCH	14,44	17,06	18,40	97,42	99,60	100,00	100,00	100,00	32,58

Nota: Se realizaron 5.000 simulaciones de Monte Carlo aplicando el generador de números pseudo-aleatorios del programa MatLab R2010a. *EAS(a,w)* indica el test EAS para una simbolización de *a* símbolos y un largo *w*. BDS (a), (b) y (s) aplican los parámetros óptimos rencontrado por Kanzler (1999), los mejores parámetros para Liu et al. (1992) y los valores críticos simulados por Kanzler (1999) para muestras pequeñas.

Finalmente, la Tabla 6 muestra los resultados del experimento de poder cuando el tamaño muestral es T=2000. El EAS presenta los mejores resultados cuando se consideran 4 símbolos y subsecuencias *w=4*, aunque una simbolización de 3 y *w=3* o *4* también produce buenos resultados. En este caso el único proceso que no puede detectar el EAS es el modelo autorregresivo no lineal (NLAR) el cual es detectado con un rechazo del 37,30% en el mejor de los casos, seguramente el porcentaje de rechazo mejore para muestras mayores a T=2000. En el caso del test BDS hay cuatro procesos que no pueden ser detectados para este tamaño muestral, el proceso caótico Anosov y los procesos estocásticos no lineales NLSIGN, NLAR y NLMA. Por otra parte, en el caso del test de racha son cinco los procesos no detectados, si bien al contrario del BDS es capaz de detectar el NLSIGN, sigue sin poder detectar el modelo Logístico, el Anosov, el Bilineal, el NLAR y el NLMA. El test EAS propuesto aquí es el único de los tres capaz de detectar el proceso caótico de Anosov y el proceso no lineal NLMA considerando este tamaño muestral. En resumen, para un tamaño muestral T=2000 el EAS es capaz de detectar 19/20 procesos, el test BDS 16/20 y el test de rachas 15/20.

Tabla 6. Poder de las pruebas para un tamaño muestral T=2000

Proceso generador	EAS(2,4)	EAS(3,3)	EAS(3,4)	EAS(4,3)	EAS(5,3)	BDS	BDS Liu	BDS small	Test de rachas
Normal	3,72	1,90	3,78	2,06	1,84	4,86	2,76	4,64	4,78
CHI-2(4)	3,32	2,08	4,38	1,80	2,02	5,10	2,88	4,92	4,30
t-student(4)	3,76	1,76	3,86	1,98	1,76	4,78	2,90	4,62	4,60
Normal truncada	3,76	1,70	3,68	1,88	1,80	5,62	3,12	2,72	5,32
Beta(1/2,1/2)	3,70	1,80	4,12	1,72	1,88	5,44	2,96	5,18	5,32
Uniforme(0,1)	3,66	2,14	4,08	1,74	2,10	6,32	3,64	6,18	5,06
AR(1)	1,78	1,20	2,82	1,36	1,22	5,32	2,92	5,08	1,72
MA(2)	2,20	0,86	3,16	1,22	1,34	5,20	2,94	4,94	1,50
Logística	29,84	100,00	100,00	100,00	100,00	99,74	79,36	99,72	11,38
Henon	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
Anosov	6,50	8,08	100,00	100,00	100,00	7,92	3,94	7,62	6,12

Lorenz	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
TAR	100,00	98,52	97,42	100,00	100,00	57,44	41,62	56,56	100,00
NLSIGN	69,70	73,22	83,50	92,74	92,72	8,04	4,56	7,54	84,84
Bilineal	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	21,20
NLAR	2,94	37,30	36,76	34,64	27,62	6,54	3,72	6,30	3,36
NLMA	99,64	100,00	100,00	100,00	100,00	14,04	14,36	13,78	48,36
BLMA	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	99,98
Modular	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
EGARCH	40,58	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	61,86

Nota: Se realizaron 5.000 simulaciones de Monte Carlo aplicando el generador de números pseudo-aleatorios del programa MatLab R2010a. *EAS(a,w)* indica el test EAS para una simbolización de *a* símbolos y un largo *w*. BDS (a), (b) y (s) aplican los parámetros óptimos rencontrado por Kanzler (1999), los mejores parámetros para Liu et al. (1992) y los valores críticos simulados por Kanzler (1999) para muestras pequeñas.

Detectando independencia en las series de tiempo financieras

Brooks (1996) señala que testear la dependencia no lineal es importante en la econometría financiera debido a las profundas implicaciones en la búsqueda de un modelo adecuado finanzas, en la eficiencia de mercado y en predicción.

En el presente estudio se consideraron cuatro activos financieros que cotizan en la bolsa de valores de Nueva York, seis índices bursátiles y cinco tipos de cambio. Asimismo se consideran diferentes frecuencias temporales (diario, semanal y mensual). La Tabla 7 muestra algunas estadísticas relacionadas con los retornos de cada una de las series.

Tabla 7. Estadísticas del retorno de series de tiempo financieras

Serie	Frecuencia	T	Media	Varianza	Asimetría	Curtosis	Test estadístico de normalidad
Citigroup	*Diaria*	9170	0,0536%	0,0007	1,2025	53,4066	973.018,60*
	Semanal	1895	0,2794%	0,0040	3,7869	89,8884	600.633,18*
	Mensual	436	1,0121%	0,0119	0,1130	10,5866	1.046,54*
Coca-Cola	*Diaria*	12926	0,0570%	0,0003	-2,9897	90,2182	4.116.265,26*
	Semanal	2678	0,2620%	0,0013	-1,7079	26,7327	64.150,50*
	Mensual	616	1,0907%	0,0047	-1,3229	13,1023	2.799,09*
IBM	*Diaria*	12926	0,0470%	0,0003	0,0294	13,0155	54.027,14*
	Semanal	2678	0,2226%	0,0012	0,0999	6,1514	1.112,62*
	Mensual	616	0,9686%	0,0049	0,2140	4,8790	95,32*
Caterpillar	*Diaria*	12927	0,0517%	0,0004	-1,2125	37,7400	653.214,89*
	Semanal	2678	0,2534%	0,0019	-0,2678	10,9607	7.103,35*
	Mensual	616	1,0656%	0,0076	-0,1546	6,0064	234,43*

S&P 500	*Diaria*	15940	0,0335%	0,0001	-0,6504	24,2393	300.735,36*
	Semanal	3304	0,1601%	0,0004	-0,3453	7,9369	3.421,03*
	Mensual	760	0,6904%	0,0018	-0,4240	4,7084	115,20*
FTSE	*Diaria*	7350	0,0305%	0,0001	-0,2089	10,9092	19.211,26*
	Semanal	1518	0,1467%	0,0006	-0,7059	11,0775	4.252,88*
	Mensual	349	0,6105%	0,0021	-0,8005	6,1044	177,41*
DAX	*Diaria*	5684	0,0413%	0,0002	0,0486	7,8679	5.614,43*
	Semanal	1171	0,1987%	0,0010	-0,3384	7,1055	844,73*
	Mensual	270	0,8400%	0,0038	-0,5284	4,9958	57,38*
BOVESPA	*Diaria*	4955	0,1856%	0,0006	0,9411	16,2854	37.171,74*
	Semanal	1045	0,8837%	0,0029	0,5525	6,6351	628,51*
	Mensual	241	4,1075%	0,0198	2,0642	12,5057	1.078,50*
NIKKEI	*Diaria*	7213	0,0155%	0,0002	-0,0492	11,0987	19.715,15*
	Semanal	1520	0,0650%	0,0008	-0,4998	7,7195	1.473,98*
	Mensual	352	0,2828%	0,0037	-0,2933	3,7348	12,97*
SHANGHAI	*Diaria*	5756	0,0844%	0,0007	12,2275	456,4849	49.464.803,30*
	Semanal	1160	0,4507%	0,0052	10,5452	189,3924	1.700.702,47*
	Mensual	269	2,1082%	0,0301	5,6259	52,8034	29.219,85*
Ex.Canada/US	*Diaria*	10644	0,0008%	0,0000	-0,0052	15,2475	66.525,07*
	Mensual	507	0,0111%	0,0002	0,8962	13,9378	2.595,15*
Ex.China/US	*Diaria*	8133	0,0190%	0,0000	55,8492	3703,1319	4.643.757.374,76*
	Mensual	387	0,3930%	0,0009	13,0613	211,0026	708.653,19*
Ex. US/Euro	*Diaria*	1680	-0,0540%	0,0006	-37,1096	1471,7500	151.391.452,12*
	Mensual	171	0,0994%	0,0006	0,0775	2,9535	0,19
Ex. US/UK	*Diaria*	10644	-0,0022%	0,0000	-0,1398	7,7514	10.046,90*
	Mensual	507	-0,0605%	0,0006	-0,1249	4,5997	55,38*
Ex. Japan/US	*Diaria*	10644	-0,0099%	0,0000	-0,5942	12,1587	37.827,76*
	Mensual	507	-0,2199%	0,0007	-0,3986	3,8298	27,97*

Nota: Cálculos propios. * Denota rechazo de la hipótesis nula de normalidad del test de Jarque-Bera al 0.05 de significación.

Se aplicó a todas las series el test de normalidad de Jarque y Bera (1980) y la hipótesis nula de normalidad es ampliamente rechazada en todos los casos con excepción del tipo de cambio entre el dólar norteamericano y el Euro cuando se considera una frecuencia mensual. Esto podría estar relacionado con el tamaño muestral con el que se cuenta *T=171* que es la menor de todas y tal vez el test no sea capaz de detectar la no normalidad a este nivel.

El próximo paso es aplicar las diferentes pruebas para los retornos de las series financieras en bruto y a los residuos luego de aplicar un modelo GARCH. Dados los resultados obtenidos en los experimentos de tamaño y poder y el tamaño muestral con el que se cuenta aquí, se seleccionó en el caso del EAS, el EAS(2,4), EAS(3,3), EAS(3,4) y EAS(4,3). A los efectos comparativos se aplican el test de rachas y el BDS.

La Tabla 8 muestra los resultados de las pruebas para los diferentes retornos financieros. Como se puede apreciar el test BDS rechaza la aleatoriedad para casi todos los casos a excepción del índice NIKKEI mensual y el tipo de cambio entre el dólar norteamericano y el euro con frecuencia mensual. El test EAS rechaza la independencia en menos casos, en particular en las series de frecuencia mensual en los cuales se cuenta con pocos datos la hipotesis de independencia parece no rechazarse fácilmente. Esto último se ve claramente para Coca Cola, IBM, Caterpillar, S&P 500, FTSE, DAX y NIKKEI. Observando la tabla resaltan Coca Cola con frecuencia diaria y el tipo de cambio entre el dólar norteamericano y la moneda china como aquellos que tienen un comportamiento fuertemente dependiente. En el caso del tipo de cambio entre EE.UU. y China tiene sentido pensarlo ya que la política cambiaria China ha sido la de controlar el tipo de cambio y solo en los últimos años gradualmente ha ido flexibilizando la política. En este sentido es de destacar que el índice de SHANGHAI es también el que presenta un mayor grado de dependencia y esto se debe a los controles y restricciones que ha presentado el mercado chino. El test de rachas rechaza solamente 16 de las 40 series como generadas por un proceso independiente.

Tabla 8. Test EAS, BDS y test de rachas sobre los retornos en bruto de activos financieros, índices bursátiles y tipos de cambio

Retorno financiero	T *(a)*	EAS(2,4)	EAS(3,3)	EAS(3,4)	EAS(4,3) *(b)*	BDS *(c)*	Test de rachas *(d)*
Citigroup (Diario)	**9170**	*1,98*	*539,28**	*1039,33**	*1223,32**	*0,00**	*no rejection*
Citigroup (Semanal)	**1895**	*19,83*	*64,39**	*148,24**	*405,51**	*0,00**	*no rejection*
Citigroup (Mensual)	**436**	*5,87*	*40,55**	*125,77**	*67,09*	*0,00**	*no rejection*
Coca Cola (Diario)	**12926**	*13253,99**	*694795,51**	*20514840,97**	*24089,11**	*0,00**	*rejection*
Coca Cola (Semanal)	**2678**	*797,78**	*86,03**	*182,59**	*782,92**	*0,00**	*rejection*
Coca Cola (Mensual)	**616**	*8,86*	*32,50*	*84,82*	*60,40*	*0,00**	*no rejection*
IBM (Diario)	**12926**	*207,11**	*205,26**	*430,68**	*547,90**	*0,00**	*no rejection*
IBM (Semanal)	**2678**	*24,50*	*26,60*	*98,89*	*104,22**	*0,00**	*no rejection*
IBM (Mensual)	**616**	*4,16*	*23,71*	*85,61*	*70,61*	*0,00**	*no rejection*
Caterpillar (Diario)	**12927**	*829,84**	*338,36**	*617,75**	*1029,65**	*0,00**	*rejection*
Caterpillar (Semanal)	**2678**	*86,68**	*34,33*	*95,75*	*84,37**	*0,00**	*rejection*
Caterpillar (Mensual)	**616**	*14,34*	*14,21*	*49,93*	*50,18*	*0,01**	*no rejection*
S&P 500 (Diario)	**15940**	*245,05**	*513,09**	*979,56**	*883,17**	*0,00**	*rejection*
S&P 500 (Semanal)	**3304**	*10,13*	*100,03**	*228,23**	*186,48**	*0,00**	*no rejection*
S&P 500 (Mensual)	**760**	*10,30*	*25,50*	*78,15*	*49,01*	*0,00**	*no rejection*
FTSE (Diario)	**7350**	*25,64**	*116,49**	*272,55**	*209,85**	*0,00**	*no rejection*
FTSE (Semanal)	**1518**	*11,82*	*53,53**	*129,33**	*93,12**	*0,00**	*no rejection*
FTSE (Mensual)	**349**	*14,23*	*20,50*	*54748,54 (N)*	*63,01*	*0,01**	*no rejection*
DAX (Diario)	**5684**	*13,04*	*105,82**	*248,25**	*286,08**	*0,00**	*no rejection*
DAX (Semanal)	**1171**	*11,67*	*81,25**	*194,02**	*152,88**	*0,00**	*no rejection*
DAX (Mensual)	**270**	*6,92*	*21,95*	*84432,94 (N)*	*16661,79 (N)*	*0,03**	*no rejection*
BOVESPA (Diario)	**4955**	*19,27*	*139,95**	*328,87**	*166,32**	*0,00**	*no rejection*
BOVESPA (Semanal)	**1045**	*20,94*	*45,83**	*141,13**	*81,08*	*0,00**	*no rejection*
BOVESPA (Mensual)	**241**	*21,23*	*41,05**	*56522,63(N)*	*29754,49(N)*	*0,00**	*rejection*
NIKKEI (Diario)	**7213**	*17,00*	*184,61**	*468,53**	*363,29**	*0,00**	*no rejection*
NIKKEI (Semanal)	**1520**	*14,26*	*77,85**	*196,49**	*119,78**	*0,00**	*no rejection*
NIKKEI (Mensual)	**352**	*9,46*	*14,58*	*27634,89(N)*	*70,57*	*0,17*	*no rejection*
SHANGHAI (Diario)	**5756**	*194,96**	*396,92**	*1064,22**	*854,35**	*0,00**	*rejection*

SHANGHAI (Semanal)	**1160**	*176,95**	*58,17**	*153,21**	*178,04**	*0,00**	*rejection*
SHANGHAI (Mensual)	**269**	*25,13**	*40,72**	*63142,02(N)*	*33166,27(N)*	*0,00**	*rejection*
Ex.Canada/US (Diario)	**10644**	*40,12**	*700,20**	*1645,48**	*1296,32**	*0,00**	*rejection*
Ex.Canada/US (Mensual)	**507**	*25,97**	*64,03**	*39963,21**	*109,02**	*0,00**	*rejection*
Ex.China/US (Diario)	**8133**	*14387,35**	*3913576,79**	*41867540,66**	*8623222,42**	*0,00**	*rejection*
Ex.China/US (Mensual)	**387**	*809,75**	*837,29**	*366410,86(N)*	*384311,27(N)*	*0,00**	*rejection*
Ex. US/Euro (Diario)	**1680**	*9,22*	*14,31*	*60,32*	*53,36*	*0,00**	*no rejection*
Ex. US/Euro (Mensual)	**171**	*22,10*	*8508,98(N)*	*278836,18(N)*	*94399,98(N)*	*0,08*	*rejection*
Ex. US/UK (Diario)	**10644**	*4,29*	*1311,28**	*3392,54**	*782,87**	*0,00**	*no rejection*
Ex. US/UK (Mensual)	**507**	*66,98**	*98,78**	*159444,32(N)*	*31462,36**	*0,00**	*rejection*
Ex. Japan/US (Diario)	**10644**	*74,14**	*1802,25**	*4770,12**	*1066,80**	*0,00**	*no rejection*
Ex. Japan/US (Mensual)	**507**	*87,75**	*92,69**	*79848,32(N)*	*137,91**	*0,00**	*rejection*

Nota: Cálculos propios. * Indica rechazo de la hipótesis nula de independencia al 5% de significación. (a) Número de observaciones. (b) Test EAS aplicado seleccionando un número de símbolos y largo de acuerdo a los experimentos de poder y tamaño. (c) p-valor del test de BDS con los parámetros óptimos de Kanzler (1999). (d) Rechazo o no rechazo de la hipótesis nula de aleatoriedad. (N) El test EAS no aplica porque el tamaño muestral es insuficiente.

La Tabla 8 muestra el resultado de las diferentes pruebas luego de que se aplica un modelo GARCH(1,1) a las series financieras. El test de rachas no rechaza la independencia en 28 casos. En este caso el BDS no rechaza que los residuos son independientes en 26 de los 40 casos. Sin embargo, es de destacar que el test EAS solo lo hace en 13 de los 40 casos. Esto indica que luego de aplicar el modelo GARCH a las series financieras el test EAS sigue detectando dependencia o no linealidad en la mayoría de los casos, no así el test BDS. A modo de ejemplo se puede señalar que luego de aplicar un GARCH(1,1) al índice S&P 500 en las diferentes frecuencias (diaria, semanal, mensual) el test BDS no rechaza que los residuos sean independientes, sin embargo el test de EAS sigue detectando algún tipo de dependencia.

Tabla 8. Test EAS, BDS y test de rachas sobre los residuos de un modelo GARCH(1,1) sobre los activos financieros, índices bursátiles y tipos de cambio

Residuo de un GARCH	T *(a)*	SRS(2,4)	SRS(3,3)	SRS(3,4)	SRS(4,3) *(b)*	BDS *(c)*	runs test *(d)*
Citigroup (Diario)	**9170**	*1,98*	*99,98**	*210,67**	*426,33**	*0,00**	*no rejection*
Citigroup (Semanal)	**1895**	*19,83*	*31,22*	*93,44*	*279,40**	*0,43*	*no rejection*
Citigroup (Mensual)	**436**	*7,06*	*20,15*	*76,76*	*51,16*	*0,18*	*no rejection*
Coca Cola (Diario)	**12926**	*11512,60**	*694785,94**	*23577565,97**	*23719,11**	*0,00**	*rejection*
Coca Cola (Semanal)	**2678**	*797,78**	*82,32**	*168,36**	*715,33**	*0,39*	*no rejection*
Coca Cola (Mensual)	**616**	*8,96*	*29,07*	*88,52*	*48,51*	*0,26*	*no rejection*
IBM (Diario)	**12926**	*207,11**	*27,22*	*88,28*	*230,90**	*0,02**	*no rejection*
IBM (Semanal)	**2678**	*25,24**	*28,80*	*107,19**	*62,37**	*0,96*	*no rejection*
IBM (Mensual)	**616**	*4,37*	*23,80*	*91,42*	*66,03*	*0,93*	*no rejection*
Caterpillar (Diario)	**12927**	*829,84**	*205,44**	*384,42**	*1350,71**	*0,00**	*rejection*
Caterpillar (Semanal)	**2678**	*86,68**	*33,22*	*85,21*	*78,68*	*0,81*	*no rejection*

Caterpillar (Mensual)	**616**	*13,82*	*19,49*	*65,52*	*56,64*	*0,74*	*no rejection*
S&P 500 (Diario)	**15940**	*224,88**	*402,18**	*695,57**	*595,81**	*0,27*	*rejection*
S&P 500 (Semanal)	**3304**	*9,34*	*85,07**	*187,74**	*178,62**	*0,80*	*no rejection*
S&P 500 (Mensual)	**760**	*11,36*	*39,53**	*101,26**	*72,82*	*0,47*	*no rejection*
FTSE (Diario)	**7350**	*6,85*	*60,06**	*152,68**	*163,52**	*0,00**	*no rejection*
FTSE (Semanal)	**1518**	*10,09*	*52,96**	*123,77**	*85,27**	*0,18*	*no rejection*
FTSE (Mensual)	**349**	*16,73*	*10,85*	*54732,62(N)*	*62,64*	*0,47*	*no rejection*
DAX (Diario)	**5684**	*11,08*	*101,52**	*197,55**	*186,67**	*0,00**	*no rejection*
DAX (Semanal)	**1171**	*10,63*	*59,21**	*131,33**	*69,67*	*0,18*	*no rejection*
DAX (Mensual)	**270**	*4,16*	*24,57*	*42260,90(N)*	*50,57*	*0,91*	*no rejection*
BOVESPA (Diario)	**4955**	*15,99*	*134,38**	*279,73**	*212,50**	*0,10*	*no rejection*
BOVESPA (Semanal)	**1045**	*17,62*	*36,40**	*111,90**	*85,99**	*0,06*	*no rejection*
BOVESPA (Mensual)	**241**	*19,88*	*20,27*	*75278,34(N)*	*58,51*	*0,42*	*no rejection*
NIKKEI (Diario)	**7213**	*11,96*	*106,49**	*245,12**	*160,36**	*0,00**	*no rejection*
NIKKEI (Semanal)	**1520**	*8,84*	*41,13**	*127,62**	*71,46*	*0,71*	*no rejection*
NIKKEI (Mensual)	**352**	*9,46*	*20,13*	*27638,60(N)*	*58,50*	*0,59*	*no rejection*
SHANGHAI (Diario)	**5756**	*194,96**	*206,46**	*582,42**	*506,30**	*0,18*	*rejection*
SHANGHAI (Semanal)	**1160**	*176,95**	*62,92**	*174,07**	*149,97**	*0,01**	*rejection*
SHANGHAI (Mensual)	**269**	*18,03*	*33,44*	*84149,32(N)*	*16620,42(N)*	*0,37*	*no rejection*
Ex.Canada/US (Diario)	**10644**	*40,12**	*62,44**	*140,98**	*109,43**	*0,42*	*rejection*
Ex.Canada/US (Mensual)	**507**	*24,76**	*45,10**	*39926,89**	*74,55*	*0,03**	*rejection*
Ex.China/US (Diario)	**8133**	*14387,35**	*3913576,79**	*41867540,66**	*8623222,42**	*0,00**	*rejection*
Ex.China/US (Mensual)	**387**	*809,75**	*826,35**	*366368,25(N)*	*503663,60(N)*	*0,00**	*rejection*
Ex. US/Euro (Diario)	**1680**	*9,22*	*24,74*	*77,71*	*82,80**	*0,00**	*no rejection*
Ex. US/Euro (Mensual)	**171**	*22,10*	*4291,65(N)*	*252306,64(N)*	*104887,07**	*0,80*	*rejection*
Ex. US/UK (Diario)	**10644**	*3,56*	*344,80**	*955,78**	*216,87**	*0,07*	*no rejection*
Ex. US/UK (Mensual)	**507**	*66,98**	*104,24**	*119642,14(N)*	*31433,72(N)*	*0,03**	*rejection*
Ex. Japan/US (Diario)	**10644**	*74,14**	*689,43**	*1832,69**	*509,97**	*0,29*	*no rejection*
Ex. Japan/US (Mensual)	**507**	*87,75**	*86,49**	*79840,61(N)*	*137,41**	*0,05**	*rejection*

Nota: Cálculos propios. * Indica rechazo de la hipótesis nula de independencia al 5% de significación. (a) Número de observaciones. (b) Test EAS aplicado seleccionando un número de símbolos y largo de acuerdo a los experimentos de poder y tamaño. (c) p-valor del test de BDS con los parámetros óptimos de Kanzler (1999). (d) Rechazo o no rechazo de la hipótesis nula de aleatoriedad. (N) El test EAS no aplica porque el tamaño muestral es insuficiente.

Conclusiones

En el presente estudio se derivó una nueva prueba de independencia que también puede ser utilizada para detectar no linealidad en series de tiempo. El mismo tiene la ventaja de ser simple de calcular y presentar una alta potencia detectando diferentes procesos aleatorios, caóticos y estocásticos no lineales. El test se basa en el análisis de serie de tiempos simbólicas que se aplica en el estudio de fenómenos cuando están altamente contaminados por ruido.

Son muchos los test de independencia, aleatoriedad y no linealidad que se encuentran en la literatura y la necesidad desde el punto de vista de la economía aplicada ha hecho que esta sea un área de investigación de gran desarrollo.

En el estudio se plantea un test que puede ser utilizado para detectar aleatoriedad, independencia o no linealidad en las series a través de una transformación de la misma y la aplicación de un estadístico que se distribuye asintóticamente como una Ch-2 de *n-1* grados de libertad, en donde *n* es la cantidad de eventos posibles. Asimismo este test está relacionado con el test de Pearson y guarda relación con la entropía de Shannon que es usada en teoría de la información para medir el grado de incertidumbre en una serie.

Se realizaron experimentos de tamaño y poder y se compararon los resultados con pruebas similares y conocidas como el test BDS y el test de rachas. En cuanto al tamaño se observó que para muestras menores a las 2000 observaciones no se debería utilizar una simbolización superior a los cuatro símbolos. Las tres pruebas parecieran ser conservadores aunque el test EAS que se desarrolló parece ser el más conservador de los tres. A los efectos de estudiar el poder del test ante diferentes procesos que eran aleatorios, independientes, no lineales o caóticos. Se apreció que a pesar de ser un test conservador de los tres fue la prueba que detectó mejor los 20 diferentes procesos. Se observa que para muestras muy pequeñas, de 50 datos fue capaz de detectar la mayoría de los procesos caóticos, en particular fue el único test que pudo detectar el proceso logístico. Para muestras de 2000 observaciones se observa que el test presentado aquí fue capaz de detectar el proceso caótico de Anosov y el modelo estocástico NLMA, mientras que ninguna de las otras pruebas pudo hacerlo. También se observa que el test de rachas y el BDS presentan diferentes desempeños, aunque es mejor este último, el test de rachas detectó el NLSIGN pero el BDS no. Sin embargo, mientras el test BDS detectó Bilineal, el test de rachas no pudo hacerlo. El test EAS fue capaz de detectar los dos modelos. Se destaca además que para un tamaño muestral de 2000 ningún test detectó el modelo NLAR.

Posteriormente se aplicó el test EAS a series financieras para diferentes frecuencias temporales (diarias, semanales, mensuales): retorno de acciones que cotizan en bolsa, índices de mercados bursátiles y tipos de cambios. Asimismo se aplicó el test a los residuos de un modelo GARCH(1,1) aplicado a cada serie. Al comparárselo con los otros test se observó que el test EAS rechazó la independencia menos veces que el BDS con los retornos en bruto, en particular cuando los datos son mensuales o se cuenta con pocas observaciones. Sin embargo, destaca el hecho que luego de aplicado el modelo GARCH(1,1) el test de BDS pocas veces rechaza la independencia, sin embargo el test de EAS sigue detectando no linealidad en muchos casos, lo cual sugeriría que en muchas series en las cuales el BDS no descartaría como buena una modelización GARCH(1,1) el test EAS la rechaza por no recoger todos los componentes no lineales.

Se debe seguir trabajando en la elaboración de pruebas más potentes para la detección de procesos no lineales o procesos dependientes en particular en muestras pequeñas. Esto es de suma importancia ya que las series con que generalmente se trabaja en economía con muestras finitas y en general cortas. En este sentido el camino de las series de tiempo simbólicas puede ser una opción a mejorar. Dentro de las futuras líneas de trabajo está la de desarrollar el test para series de tiempo multidimensionales, ya que la simbolización permite transformar una serie de muchas dimensiones en una serie unidimensional permitiendo la simplificación del análisis.

Bibliografía

Azzalini, A., Bowman, A., (1993), "On the Use of Nonparametric Regression for Checking Linear Relationships", *Journal of the Royal Statistical Society. Series B*, Vol 55 (2), pp. 549-557.

Barnett, W, Gallant, A., Hinich, M., Jungeilges, J., Kaplan, D., Jensen, M., (1997), "A single-blind controlled competition among tests for nonlinearity and chaos", *Journal of Econometrics*, Vol. 82, pp-157-192

Brock, W., Dechert, W., LeBaron, B., Scheinkman, J., (1996), "A test for independence based on the correlation dimension", Econometric Reviews, Vol. 15, pp. 197-235

Brooks, C., (1996), "Testing for non-linearity in daily sterling exchange rates", *Applied Financial Economics*, Vol. 6, pp. 307-317

Daw, C., Finney, C., Tracy, E., (2003), "A Review of Symbolic Analysis of Experimental Data", *Review of Scientific Instruments*, Vol. 74 (2), pp. 915-930

Daw, C., Finney, C., Nguyen, K., Halow, J., (1998), "Symbol statistics: a new tool for understanding multiphase flow phenomena", *1998 International Mechanical Engineering Congress & Exposition (ASME)* (Anaheim, California USA; 1998 November 15-20).

Durbin, J, Watson, S, (1951), "Testing for Serial Correlation in Least Square Regression. II", *Biometrika*, Vol. 38 (1/2), pp. 159-177

Durbin, J, Watson, S, (1950), "Testing for Serial Correlation in Least Square Regression. I", *Biometrika*, Vol. 37 (3/4), pp. 409-428

Dufour, J., Lepage, Y., Zeidan, H., (1982), "Nomparametric testing for time series: a bibliography", *The Canadian Journal of Statistics*, Vol. 10, pp. 1-38.

Elsinger, H., (2013), "Comment on a new test for chaos and determinism based on symbolic dynamics", *Journal of Economic Behavior and Organization*, (forthcoming)

Finney, C., Nguyen, K., Daw, C., Halow, J., (1998b), "Symbol-sequence statistics for monitoring fluidization", In: Proceedings of the 1998 International Mechanical Engineering Congress & Exposition (ASME), Anaheim, CA, USA, pp. 405–411.

Finney, C., Green, J., Daw, C., (1998a), "Symbolic time-series analysis of engine combustion measurements", SAE Paper No. 980624

Granger, C., Liu, J., (1994), "Using the mutual information coefficient to identify lags in nonlinear models", *Journal of Time Series Analysis*, Vol. 15, pp. 371-384

Granger, C., Maasoumi, E., Racine, J., (2004), "A dependence metric for possibly nonlinear processes", *Journal of Time Series Analysis*, vol. 25 (5), pp. 649-669.

Hinich, M., (1982), "Testing for Gaussianity and linearity of a stationary time series", *Journal of Time Series Analysis*, Vol. 3 (3), pp. 169-176

Hong, Y., White, H., (2005), "Asymptotic distribution theory for nonparametric entropy measures of serial dependence", *Econometrica*, Vol. 73, pp. 837-901

Jarque, C., Bera, A. (1980), "Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals", *Economics Letters,* Vol. 6 (3), pp. 255–259

Joe, H., (1989a),"Relative Entropy Measures of Multivariate Dependence", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 84, pp. 157-164

Joe, H., (1989b), "Estimation of Entropy and Other Functionals of a Multivariate Density", *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, Vol. 41, pp. 683-697

Kanzler, L., (1999), "Very fast and correctly sized estimation of the BDS statistic", *Unpublished manuscript*, Christ Church and Department of Economics, University of Oxford, Available at SSRN 151669.

Kaplan, D., (1994), "Exceptional events as evidence for determinism", *Physica D*, Vol. 73, pp. 38-48.

Lui, T., Granger, C., Heller, W., (1992), "Using the Correlation Exponent to Decide Whether an Economic Series is Chaotic", *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 7, Supplement: Special Issues on Nonlinear Dynamics and Econometrics, pp.S25-S39.

Mathai, A., Provost, S., (1992), *Quadratic Forms in Random Variables: Theory and Applications*, Marcel Dekker, Inc.

Matilla-García, M., Ruiz, M., (2008), "A non-parametric Independence test using permutation entropy", *Journal of Econometrics*, Vol. 144(1), pp.139-155

Nychka, D., Ellner, S., Gallant, R., McCaffrey, D., (1992), "Finding chaos in noisy systems", *Journal of the Royal Statistical Society. Series B*, Vol. 54, pp. 399-426

Oman, S., Zacks, S., (1981), "A Mixture Approximation to the Distribution of Weighted Sum of Chi-Squared Variables", *Journal of Statistical Computation and Simulation*, Vol. 13, pp. 215-224.

Patnaik, P., (1949), “The Non-Central Chi-Square and F-distributions and their applications”, *Biometrika*, Vol. 36, pp. 128-131.

Pearson, E., (1959), “Note on an Approximation to the Distribution of Noncentral χ^2”, *Biometrika*, Vol. 46, p. 364.

Piccardi, C., (2004), “On the Control of Chaotic Systems via Symbolic Time Series Analysis”, *Chaos*, Vol. 14, No. 4, pp. 1026-1034

Robinson, P., (1991), “Consistent nonparametric Entropy-Based testing”, *Review of Economic Studies*, Vol. 58, pp. 437-453

Siddiqui, M., (1965), “Approximations to the Distribution of Quadratic Forms”, *The Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 26, pp. 677-682.

Solomon, H., Stephens, M., (1978), “Approximation to Density Functions using Pearson Curves”, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 73, pp. 153-160.

Vinod, H, (1973), "Generalization of the Durbin-Watson Statistic for Higher Order Autoregressive Processes", *Communications in Statistics*, Vol. 2, pp. 115-144.

Wald, A., Wolfowitz, J., (1944), “Statistical Tests Based on Permutations of the Observations”, *The Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 15 (4), pp. 358-372.

Wald, A., Wolfowitz, J., (1943), “An Exact Test for Randomness in the Non-Parametric Case Based on Serial Correlation”, *The Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 14 (4), pp. 378-388

Wallis, K, (1972), "Testing for Fourth Order Autocorrelation in Quarterly Regression Equations", *Econometrica*, Vol. 40, pp. 617-636.

White, H., (1989), “An Additional hidden unit test for neglected nonlinearity in multilayer feedforward networks”, in: Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks, Vol.2, IEEE Press, New York, pp. 451-455

Williams, S., (2004), “*Symbolic Dynamics and its Applications*”, Proceeding of Symposia in Applied Mathematics, Vol. 60, 150 pp.